LOGIQUE

Définition :

Si l'on considère une phrase mathématique P dont on isole une lettre par exemple la lettre "x", la phrase mathématique s'écrire P(x).

Si la phrase mathématique P(x) prend les valeurs de vérité V (pour vrai) ou F (pour faux) ou encore (en écriture booléenne) 1 (pour vrai) ou 0 (pour faux) : on dit que P(x) est une assertion.

Remarque : Si x decrit un ensemble E de valeur, l'assertion P(x) prend, en fonction de c, des valeurs de vérité

Exemple : 2x = 3 ou x∈IN : P(x) est aussi quel que soit x, x∈IN  
 P(x) E

2x=3 soit x∈IR : P(x) est vrai pour et fausse ailleurs

Dans l'exemple précèdent, le fait que réalise P(x) VRAI se note par un quantificateur existentiel:

Il existe tel que

Q(x) est vrais dès lors que l'on peut trouver x∈IR tel que 2x=3 vrai

Soit l'assertion :  
 Tous les bateaux vont sur l'eau  
 Non il existe des bateaux qui ne vont pas sur l'eau

Définition :

NON est un opérateur qui porte sur association P telle que l'assertion NON P est fausse lorsque P est vrai.  
notation

D'après ce qui précède est la même assertion que

"Quel que soit" ou "pour tous" s'appelle un quantificateur universel

Tableau de vérité de NON

|  |  |
| --- | --- |
| P |  |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

On définit des opérateurs linaires (qui porte sur 2assertions)

ET :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P.Q |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

OU :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P+Q |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

XOR

O

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P + Q |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | R | P.Q | (P.Q)+R |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

O

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| P | Q | R |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Rappel : notation Booléenne :

OPERATION BINAIRE . ET . : multiplication Booléenne  
(porte sur 2 propositions ou assertion) (parfois sans signe)

+ OU + : Addition Booléenne

OPERATION UNAIRE NON : NON Booléenne  
(porte sur 1 propositions ou assertion) (parfois sans signe)

Intro algèbre Booléennes :

On s'aperçoit que les règles opératoires qui s'appliquent aux proportions avec les opérateurs (., +, ) sont identiques à celles qui s'appliquent aux parties d'un ensemble Ω avec les opérateurs respectifs :

Avec ces opérateurs on obtient tous les autres : NOR, NAND, XOR, XNOR

Définition : une algèbre de Boole est un ensemble E mini des opérations (., +, ) Vérifiant les règles de la feuille fournit

On peut écrire toutes les expressions booléennes sous forme canonique disjonctive.

Si l'on considère 3 variable booléennes :

Utilité :  
  
sur un exemple de modélisation :

A :"être payé plus de 2000€ par mois"  
B :"avoir travailler plus de 10ans

C :"avoir fait plus de 3 société"

On décide de la règle administrative qui récompense les méritants par une prime :

Etre payé plus de 2000€ et avoir travaillé plus de 10ans

OU

N'avoir pas fait plus de 3 sociétés et avoir travailler plus de 10ans

OU

Etre payé plus de 2000€

1/ Trouver l'expression booléenne qui traduit cette règle

2/ Simplifier cette règle

(payé + de 200€ OU N'avoir pas fait plus de 3 sociétés et avoir travailler plus de 10ans)

3/ tableau de vérité

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 |  | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |  | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |  | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |  | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |  | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |  | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |  | 0 | 1 |

Diagramme de Karnaugh :

C'est une façon de disposer les tableaux de vérité d'une expression booléenne afin de simplifier au maximum cette expression

A 3 variable : abc pour a+

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Simplification des expressions :

On regroupe les 1 en rectangle de 8 puis de 4 puis de 2 puis de 1 ne contenant que des 1

ATTENTION : pour les regroupements en rectangle dans la feuille est à voir comme un cylindre

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| B AC | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | 1 | 1 |  |  |
| 1 | 1 |  | 1 | 1 |

b/a/c + /b/a/c + /a/b/c + abc + ab/c

/a/c + 1 + ab/c

1